

Analiza matematyczna I

Zestaw IV

Zadanie 1. Czy dla szeregu

1)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \cos \frac{1}{n}$$

2)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{\sqrt{2n^4+1}}$$

spełniony jest warunek konieczny zbieżności szeregu? Czy szereg ten jest zbieżny?

Zadanie 2. Korzystając z kryterium Cauchy'ego, zbadać zbieżność szeregu

$$1 + \frac{3}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{2n}} + \frac{3}{2^{2n+1}} + \dots$$

Czy kryterium d'Alemberta pozwala nam rozstrzygnąć zbieżność tego szeregu?

Zadanie 3. Korzystając z kryterium d'Alemberta, zbadać zbieżność szeregu

1)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$$

2)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{3^n \cdot n!}$$

3)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n}{2^n}$$

4)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2^n}$$

5)

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{\pi^n}$$

6)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-10)^n}{4^{2n+1}(n+1)}$$

7)

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2}{(2n-1)!}$$

8)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{9^n}{(-2)^{n+1}n}$$

9)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2}$$

Zadanie 4. Czy szereg

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$

jest zbieżny? Czy kryterium d'Alemberta lub kryterium Cauchy'ego pozwala to rozstrzygnąć?

Zadanie 5. Stosując kryterium ilorazowe (limesowe) zbadać zbieżność szeregu

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^3 + n - 2}{2n^5 - n + 4}$ 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + 4^n}{2^n + 5^n}$ 3) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{n}$

4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}$ 5) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 1}$ 6) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2}}$

7) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin^2 \left(\frac{1}{n} \right)$ 8) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^5 + 8}$ 9) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n + 1}{\sqrt{n^5 + 4n^2 + 12}}$.

Zadanie 6. Za pomocą kryterium Cauchy'ego zbadać zbieżność szeregu

1) $\sum_{n=2}^{\infty} \ln^n \left(10 + \frac{1}{n} \right)$ 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \cdot n^{n^2}}{(n+1)^{n^2}}$ 3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{3^{1+2n}}$

4) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n} \right)^{n^2}$ 5) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n} \right)^{n^2}$ 6) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5n - 3n^3}{7n^3 + 2} \right)^n$

7) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n + 3^n}$ 8) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n}{2^n}$ 9) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{2n-7}{5n+2} \right)^n$.

Zadanie 7. (★) Korzystając z kryterium Dirichleta, wykazać zbieżność szeregu

1)	2)
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-n}}{n}$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi}{3}}{\sqrt{n}}$
3)	4)
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{2}{3}\pi n}{n}$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi}{6}}{n\sqrt{n}}$

Zadanie 8. (★) Korzystając z kryterium Abela, uzasadnić zbieżność szeregu

1)	2)
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin \frac{1}{n}$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n(1-3^{2n})}$
3)	4)
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+\frac{x}{n})^n}{2^n}$	$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(n+1)^n}{n^{n+1}}$
5)	6)
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{2^n + 1}$	$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2 + 3n + 1}{n^4 + 2n^2} \cdot \sum_{k=1}^n \frac{2}{k^2} \right)$

Czy w którymś z powyższych szeregów nie można było zastosować kryterium Dirichleta?

Zadanie 9. Korzystając z kryterium Leibniza, uzasadnić zbieżność szeregu

1)	2)
$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$	$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (\sqrt[n]{3} - 1)$
3)	4)
$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+2}{n^2+3}$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(n+1)}$
5)	6)
$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\ln n}{n}$	$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin(n\pi + \frac{\pi}{2})}{n\sqrt{n}}$

Zadanie 10. Wyznaczyć środek i przedział zbieżności szeregu potęgowego

$$1) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \qquad 2) \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} 2^n \frac{(x+3)^n}{n} \qquad 3) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^n}{x^n}$$

Zadanie 11. Zbadać zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n(n+4)}$$

z definicji.

Zadanie 12. Korzystając z kryterium porównawczego, zbadać zbieżność szeregu

$$1) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n+1)}{\sqrt[3]{n^2}} \qquad 2) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n + n}$$

$$3) \quad \sum_{n=1}^{\infty} n \sin \frac{1}{n^2} \qquad 4) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + 1}{2n^3 + 1}$$

Me: Mom, can we get e^x ?

Mom: We have e^x at home.

e^x at home: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$